LE EQUAZIONI DI MAXWELL

1) CAMPO ELETTRICO INDOTTO DA UN CAMPO MAGNETICO VARIABILE

Si considerino due solenoidi affacciati portanti all'interno un nucleo di ferro (per amplificare il campo magnetico generato dalla corrente che circola nei solenoidi). Facendo variare progressivamente la corrente **i,** che circola nei due solenoidi, varia l'intensità del campo magnetico **B** tra essi.

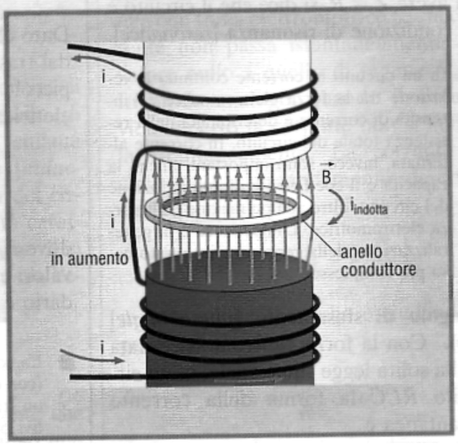


Figura 12.1. Un anello conduttore è situato tra i poli nord e sud di un elettromagnete in cui la corrente sta aumentando. La variazione del flusso magnetico fa circolare una corrente indotta nell'anello. Ciò significa che nei punti in cui si trova l'anello si è creato un campo elettrico diverso da zero.

Per fissare le idee possiamo supporre di essere nelle condizioni in cui il campo magnetico aumenta regolarmente nel tempo. Ponendo tra i due solenoidi una spira circolare in essa per la legge di Faraday-Neumann, insorge una f.e.m. e quindi una corrente indotta.

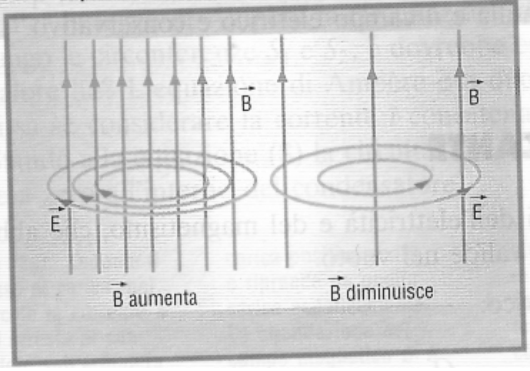
All'insorgere di una corrente indotta corrisponde, dal punto di vista microscopico, l'insorgere di un campo elettrico indotto E_i.

<u>Si può concludere che, la variazione di flusso del campo magnetico B, concatenato con la spira, ha generato nei vari punti della spira un campo elettrico indotto E_i che agendo sui portatori di carica q con una forza $F=q.E_i$ li obbliga a muoversi all'interno della spira</u>**.**

E' fondamentale capire che l'esistenza del campo elettrico indotto E_i non è legato alla presenza della spira, la quale agisce unicamente come rivelatore di tale campo elettrico.

Il campo elettrico indotto E_i possiede le stesse proprietà del campo elettrostatico?

Figura 12.2. Nella zona tra i poli dell'elettromagnete della figura 12.1, in cui si trova l'anello conduttore, la variazione del campo magnetico crea un campo elettrico, le cui linee di campo sono circolari e stanno su un piano perpendicolare rispetto alle linee del campo magnetico. Il verso delle linee del campo elettrico cambia a seconda di come varia il flusso magnetico attraverso la superficie che esse racchiudono.



Si rappresentino le linee di forza del campo elettrico indotto, esse sono delle linee chiuse, cioè delle circonferenze concentriche. Calcolando la circuitazione di E lungo una linea di forza (suddivisa in tratti infinitamente piccoli tali che il vettore E e il tratto di linea siano paralleli), si ha:

$\Delta W_i = E_i.q.\Delta s_i$ quindi W $_{tot}$ = $\sum \Delta W_i = E_i.q.\sum \Delta s_i$

dividendo ambo i membri per q si ha: $\frac{W_{tot}}{q} = E_i.\sum \Delta s_i$

Il primo membro, per definizione, non è altro che la forza elettromotrice f_m, il secondo membro per definizione è la circuitazione del campo elettrico E_i quindi

$$f_{m,}=C(E_i) \qquad (1)$$

ma per la legge di Faraday-Neumann la forza elettromotrice indotta $f_m = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t}$

e quindi la (1) diventa:

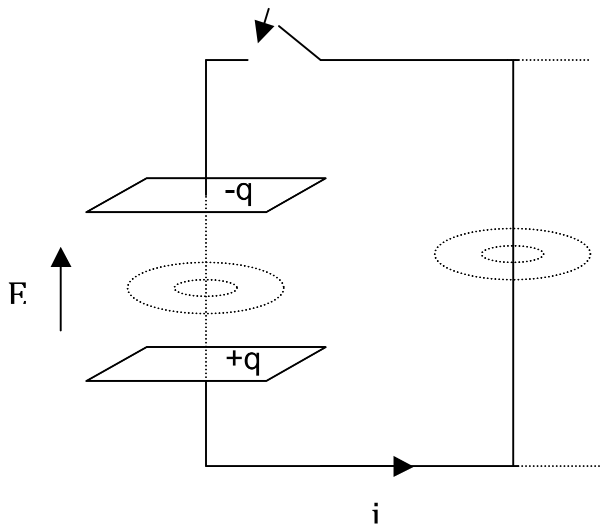
$$\boxed{C(E_i) = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} \qquad (2)}$$

Conclusione: <u>il campo elettrico indotto non è conservativo</u>.

<u>N.B.:</u> La relazione C(E)=0 trovata per il campo elettrostatico non è in contrasto con quest'ultima formula, anzi può essere considerata come caso particolare della (2); infatti se le grandezze elettriche (i) si mantengono costanti nel tempo, anche le grandezze magnetiche (B) si mantengono costanti nel tempo e il secondo membro della (2) è nullo cioè C(E)=0.

2) CAMPO MAGNETICO INDOTTO DA UN CAMPO ELETTRICO VARIABILE

Si consideri adesso un circuito elettrico nel quale è inserito un condensatore piano inizialmente scarico. Chiudendo il circuito, in esso inizia a fluire una corrente di intensità **i,** contemporaneamente inizia il processo di carica del condensatore e <u>tra le armature del condensatore insorge un campo elettrico variabile nel tempo.</u>



Si sa, inoltre, che attorno ai conduttori in cui fluisce la corrente si genera un campo magnetico.

Cosa succede tra le armature del condensatore?

Ponendo un ago magnetico nello spazio tra le due armature, si nota sperimentalmente che lo spazio è sede di un campo magnetico e che le linee di forza di tale campo hanno lo stesso andamento di quelle riscontrate attorno ai conduttori percorsi da corrente.

Tutto ciò induce a pensare che tra le armature del condensatore debba succedere qualcosa che provoca gli stessi effetti di una corrente. In altri termini, ipotizzando che il campo magnetico sia stato prodotto da una variazione di flusso del campo elettrico attraverso una superficie parallela alle armature, occorre mostrare che la variazione di tale flusso, nell'intervallo di tempo Δt, è a tutti gli effetti <u>equivalente</u> alla corrente i che circola nei conduttori collegati alle armature del condensatore.

Si sa che, tra le armature di area A del condensatore piano, l'intensità del campo elettrico all'istante t è $E = \frac{q}{\varepsilon_o A}$ e all'istante t+ Δt è $E' = \frac{q + \Delta q}{\varepsilon_o A}$

essendo Δq la carica trasferita sulle armature nell'intervallo di tempo Δt. Ne segue che

$$\Delta\Phi(E) = \Delta E.A = \frac{\Delta q}{\varepsilon_o A}.A = \frac{\Delta q}{\varepsilon_o}$$ dividendo per Δt si ha: $$\frac{\Delta\Phi(E)}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\varepsilon_o \Delta t}$$

ed essendo $\frac{\Delta q}{\Delta t} = i_s$ si ha: $$\frac{\Delta\Phi(E)}{\Delta t} = \frac{i}{\varepsilon_o}$$

cioè: $$\boxed{i_s = \varepsilon_o.\frac{\Delta\Phi(E)}{\Delta t}} \quad (3)$$

Quindi la rapidità con cui varia il flusso del campo elettrico tra le due armature (2° membro) è equivalente ad una corrente (1°membro). Tale corrente è detta corrente di spostamento. Il risultato dedotto, impone una correzione della legge della circuitazione di Amperè per il campo magnetico, cioè: $C(B)= \mu_o(i+i_s)$

Ossia $$\boxed{C(B) = \mu_o\left(i + \varepsilon_o \frac{\Delta\Phi(E)}{\Delta t}\right)} \quad (4)$$

3) EQUAZIONI DI MAXWELL

Le equazioni precedenti permettono di cogliere le connessioni tra il campo elettrico e il campo magnetico e quindi di descrivere lo spazio contemporaneamente sede di un campo elettrico e di un campo magnetico, cioè sede di **un campo elettromagnetico**.

L'intera teoria del campo elettromagnetico è stata sintetizzata nelle seguenti quattro equazioni fondamentali dette equazioni di Maxwell:

1. $\Phi(E) = \frac{q}{\varepsilon_o}$ Teorema di Gauss per il campo elettrico
2. $\Phi(B) = 0$ Teorema di Gauss per il campo magnetico
3. $C(E) = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t}$ Teorema di Faraday – Neumann - Lenz
4. $C(B) = \mu_o\left(i + \varepsilon_o \frac{\Delta\Phi(E)}{\Delta t}\right)$ Teorema di Ampere - Maxwell

Osservazioni:

a) in presenza di fenomeni stazionari, cioè nei casi in cui E e B si mantengono costanti nel tempo le equazioni si riducono a:

$$\Phi(E) = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad \Phi(B) = 0$$

$$C(E) = 0 \qquad C(B) = \mu_o i$$

Si nota che la descrizione del campo elettrico può essere formulata prescindendo da cognizioni sulle caratteristiche del campo magnetico e viceversa. Questo ci fa capire perché i fenomeni elettrici e quelli magnetici sono stati considerati per molto tempo indipendenti.

b) Nel vuoto, ossia in uno spazio in cui non vi sono cariche, ferme o in moto, le equazioni di Maxwell si riducono a:

$$\Phi(E) = 0 \qquad \Phi(B) = 0$$

$$C(E) = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} \qquad C(B) = \mu_o\varepsilon_o \frac{\Delta\Phi(E)}{\Delta t}$$

Si nota che una variazione di campo elettrico produce nello spazio circostante, anche se vuoto, un campo magnetico a sua volta variabile e viceversa; cioè in presenza di fenomeni non stazionari, esiste una entità fisica chiamata **campo elettromagnetico**.